# ***Líneas Planas***

D.I. Patricia Muñoz

Laboratorio de Morfología
SICyT - FADU - UBA

Morfología Especial 1
Carrera de Diseño Industrial
FADU - UBA

Morfología 2
Carrera de Diseño Industrial
FAUD - UNC

Han colaborado en este trabajo:
Arq. Lucía Castellano
Arq. Guillermo Olguín
Arq. Raúl Calvimonte
D.C.V. Nora Pereyra

# *LINEAS PLANAS*

## Propiedades fundamentales de las líneas planas:

### Tangencia:

Una curva tiene en cada punto una recta que es su tangente*[1]. La tangente es el caso límite de cuerdas de una curva, cuando los extremos se aproximan infinitamente. (Figura 1)

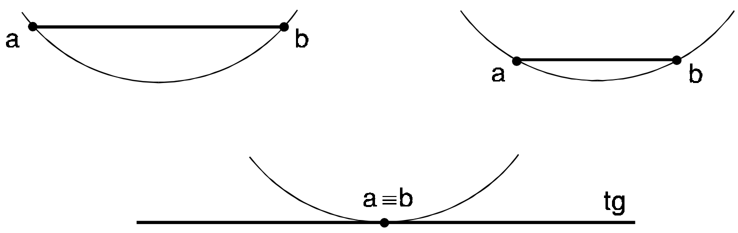



Figura 1

### Curvatura:

En una circunferencia la curvatura es inversamente proporcional al radio. Por lo tanto a mayor radio le corresponde un valor menor de curvatura, en consecuencia una recta tiene curvatura nula (Figura 2).

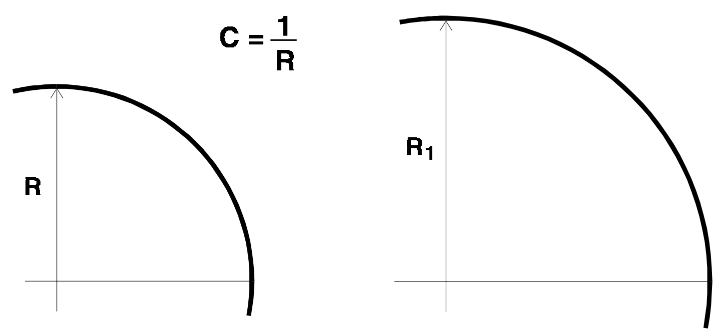



Figura 2

Para calcular la curvatura de otras curvas se usa el ángulo de contingencia. Es el formado por las dos tangentes trazadas a los extremos de un arco. Este ángulo mide la curvatura absoluta del mismo. (Figura 3)

Si se divide el ángulo de contingencia por la longitud del arco se obtiene la curvatura media del mismo. Se denomina curvatura en un punto al límite de la variación del ángulo de dos tangentes infinitamente próximas, es decir que el arco considerado es infinitamente pequeño.

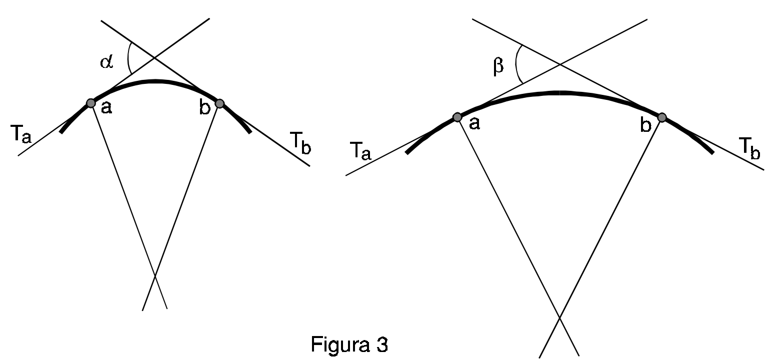



Figura 3

### Inflexiones:

Son puntos tales, que definida su línea tangente, puntos de la figura infinitamente próximos al considerado queden ubicados en semiplanos opuestos. (Figura 4)

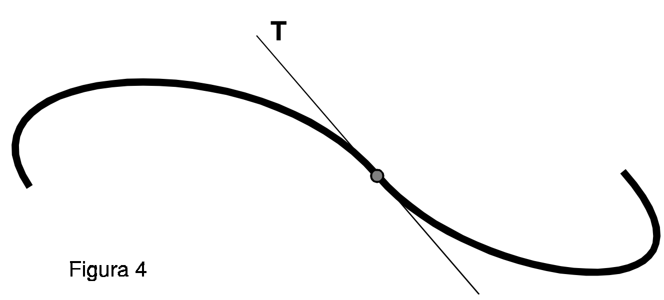



Figura 4

### Entidad de doble tangencia:

Son aquellos puntos que poseen dos rectas tangentes. Frecuentemente, en geometría, se denominan puntos “cuspidales” o “de retroceso”.(Figura 5)

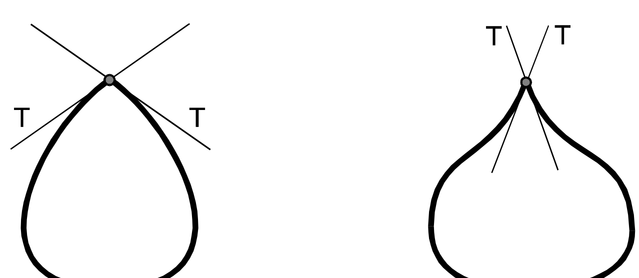



Figura 5

*[1] Existen puntos especiales que tienen dos rectas tangentes, como se explica más adelante bajo el título "Entidad de doble tangencia". También existen casos limitados en los que hay puntos de una curva que no tienen recta tangente.

**Concepto de Empalme:**

Denominaremos empalme a la unión continua de dos líneas. Los casos generales son curva-recta y curva-curva. La continuidad requerida esta determinada por dos factores, uno geométrico y otro perceptual.

Para que la unión entre dos líneas sea continua ambas deben tener la misma tangente en el punto de empalme.
(Figura 6)

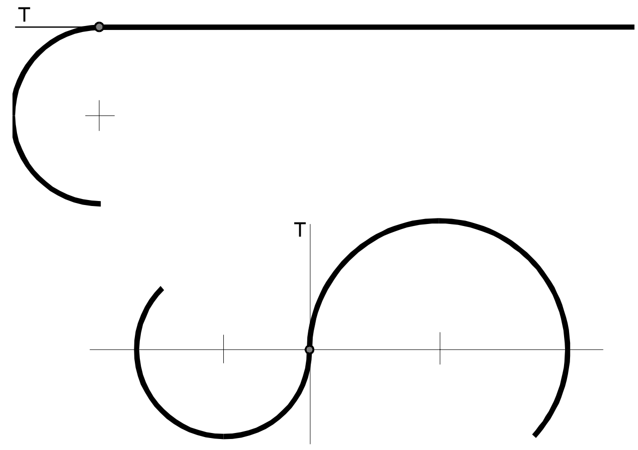



Figura 6

Es conveniente que ambas líneas, en caso de ser curvas, tengan igual o similar curvatura en el punto de encuentro. Esto les otorga no solo continuidad en el orden geométrico, sino también en el orden perceptual.
(Figura 7)

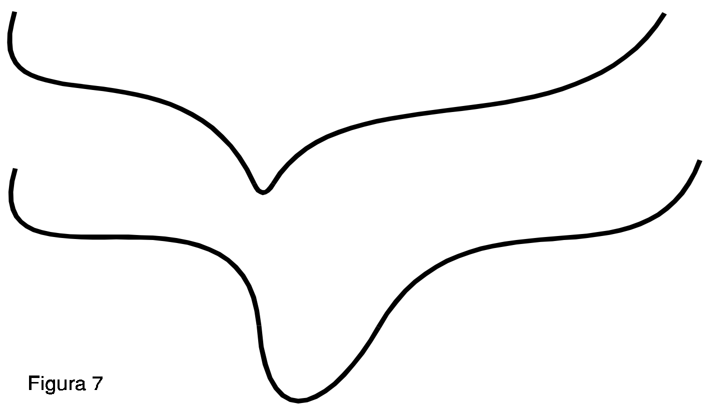
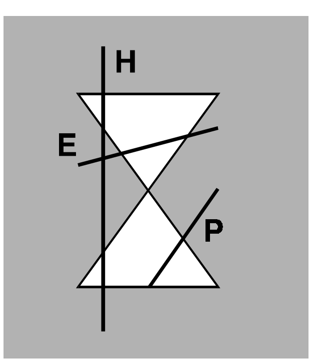


Figura 7

## *CURVAS CONICAS:*

Son aquellas que se obtienen como secciones planas de un doble cono. Estas son circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.(Figura 8)



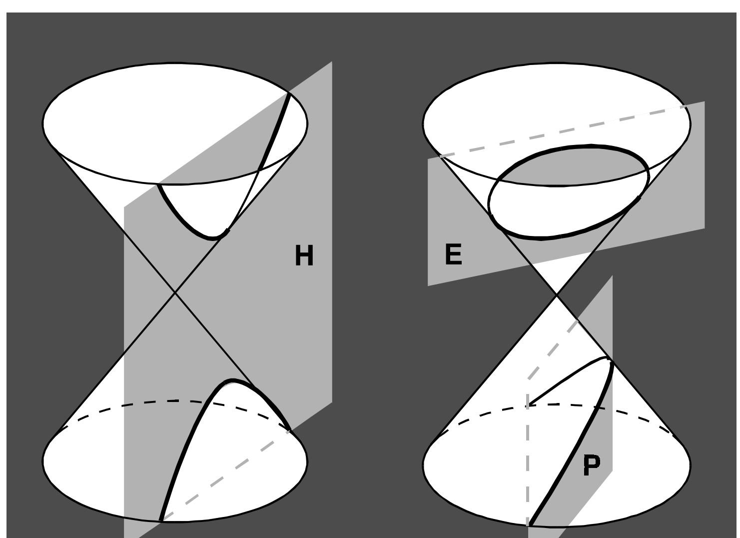




Figura 7

## CIRCUNFERENCIA:

Se genera con un corte horizontal, perpendicular al eje. Es de curvatura constante. Solo varía en escala. Se define como el conjunto de puntos que equidistan de un centro.(Figura 9)

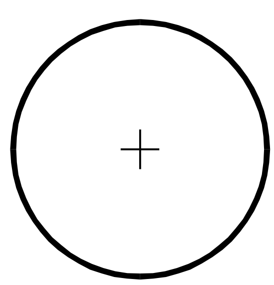


Figura 9

**Empalmes entre arcos de circunferencia:**

Para resolver un empalme entre arcos de circunferencia debemos determinar el centro de la curva de empalme ($C_3$) y los puntos de empalme “a” y “b”.

Tenemos como dato la ubicación de los centros de los dos arcos ($C_1$ y $C_2$), sus radios ($R_1$ y $R_2$) y el radio del arco que los unirá ($R_3$). (Figura 10)

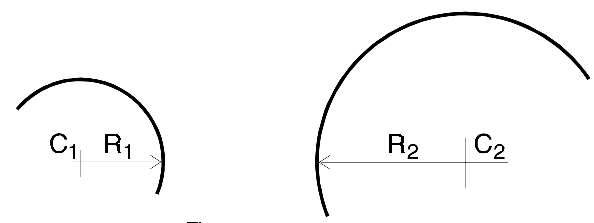


Figura 10

El centro correspondiente ($C_3$) está en la intersección de las paralelas de los arcos a empalmar, trazadas a una distancia igual al radio del arco de empalme.

Recordemos que la paralela a un arco de centro C y radio $R_1$ a una distancia $R_3$, es otro arco concéntrico al primero cuyo radio es $R_1$ +/- $R_3$. En la Figura 11 esta el arco G y sus paralelos H e I.

Los puntos de empalme “a” y “b” se encuentran en la intersección de los arcos a empalmar con la recta que une el centro de la curva de empalme con el centro de la curva dato correspondiente.

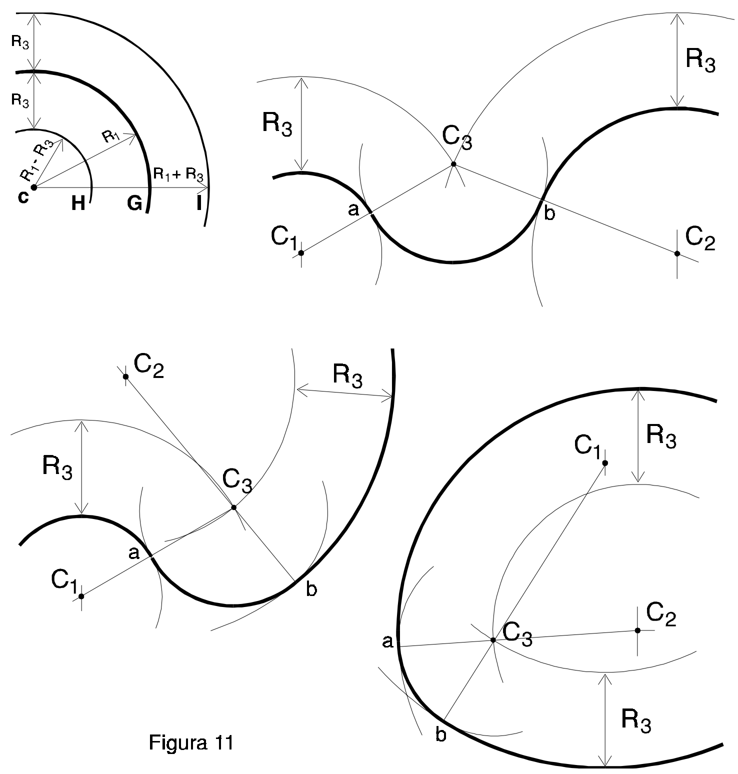


Figura 11

El caso particular de empalmes entre arcos de circunferencia y segmentos de recta lo resolvemos del mismo modo, ya que podemos considerar a las rectas como una circunferencia con radio infinitamente grande y por lo tanto con centro en el infinito.

Definimos la ubicación del centro $C_3$ en la intersección de las paralelas a las rectas a una distancia correspondiente al radio de la curva de empalme.(Figura 12)

En este caso para encontrar los puntos “a” y “b” trazamos desde el centro del arco de empalme,$C_3$, las perpendiculares a los segmentos de recta a empalmar.

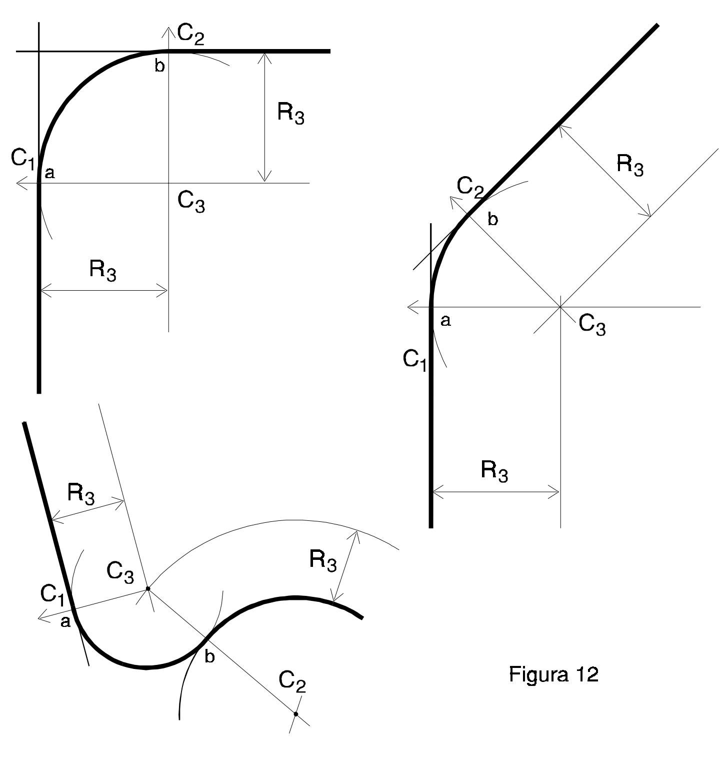


Figura 12

## ELIPSE:

Se genera con un corte oblicuo del cono. Puede ser mas alargada o de una forma que tienda a la circunferencia, de acuerdo al ángulo que forme el plano de corte con el eje.

Al acercarse al límite de paralelismo con la generatriz recta la elipse es mas alargada, al aproximarse al límite de perpendicularidad con el eje la elipse es más próxima a la circunferencia.(Figura 13)

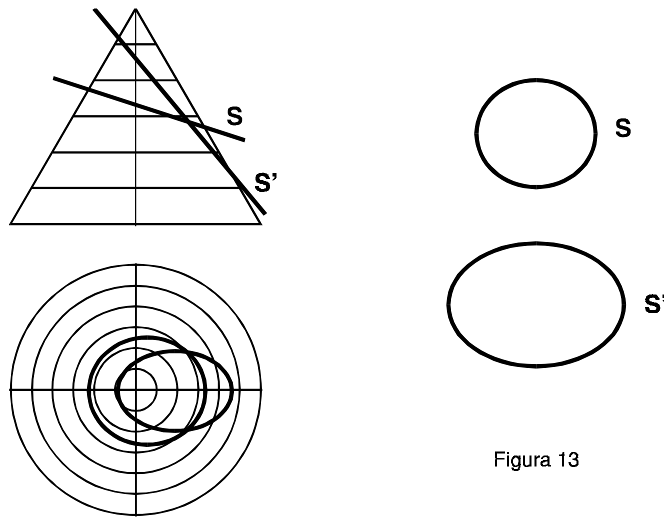



Figura 13

Se define como el conjunto de puntos en el plano cuya suma de distancias a otros dos llamados focos es constante.(Fig. 14)

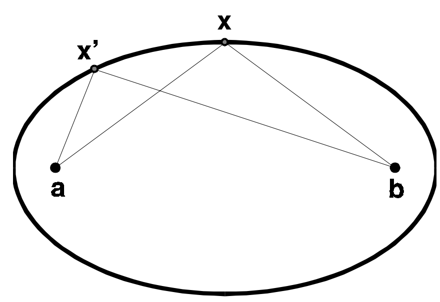



Figura 14

**Construcción de elipses:**

Para construir una elipse de ejes 2A y 2B se trazan, con centro en "o", dos circunferencias de radios A y B, y rectas que las corten como indica la Figura 15.

Las intersecciones de las rectas con las circunferencia determinan los puntos por los que se trazaran paralelas a los ejes: al mayor por las intersecciones con la circunferencia interior y al menor por las intersecciones con la circunferencia exterior. Donde dichas paralelas se cortan se encuentra un punto perteneciente a la elipse. Obteniendo los puntos suficientes se puede dibujar con el pistolete.

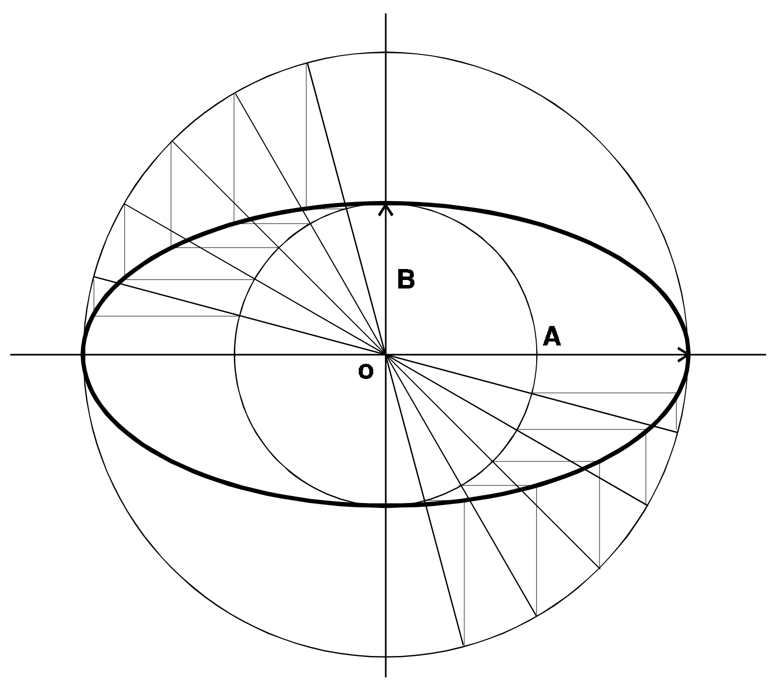



Figura 15

Otra manera de construirla es la siguiente: Se dividen los segmentos $\overline{ob_1}$ y $\overline{rb_1}$ en el mismo numero de partes iguales. Las rectas trazadas desde "a" por las divisiones de $\overline{rb_1}$ y las trazadas desde "$a_1$" por las divisiones de $\overline{ob_1}$ se cortan dos a dos en puntos de la elipse.(Figura 16)

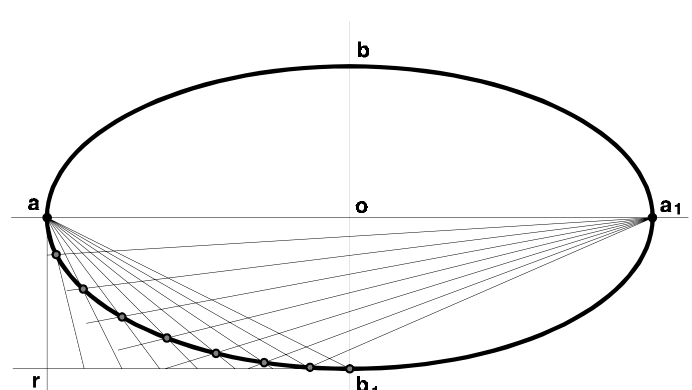



Figura 16

**Tangentes de elipses:**

Las tangentes a la elipse en los puntos “a”, “b”, “$a_1$”y “$b_1$”son los lados del rectángulo que la inscribe.

Para definir la tangente en cualquier otro punto de la curva necesitamos encontrar los focos. Dada la elipse de ejes $aa_1$ y $bb_1$, Figura 17 definimos los focos de la misma trazando desde b con radio oa un arco de circunferencia que corte el eje aa’. Los puntos de intersección son los focos de la elipse, “f” y “$f_1$”.

La tangente a cualquier punto “x” de la elipse es la recta perpendicular a la bisectriz del ángulo $fxf_1$.

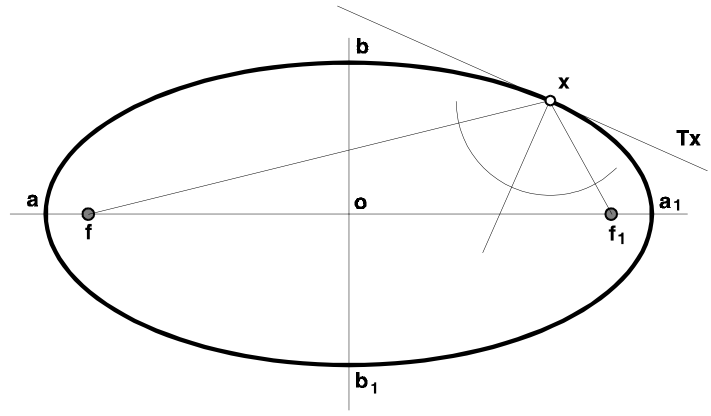


Figura 17

**Empalmes de elipses:**

Para producir un empalme entre sectores de elipses estos deben tener en el punto de unión la misma tangente.

Conociendo la tangente del punto de empalme podemos realizarlo, recordando que la unión tenderá a leerse como continua si la curvatura de las dos elipses en el punto de encuentro es igual o similar.(Figura 18)

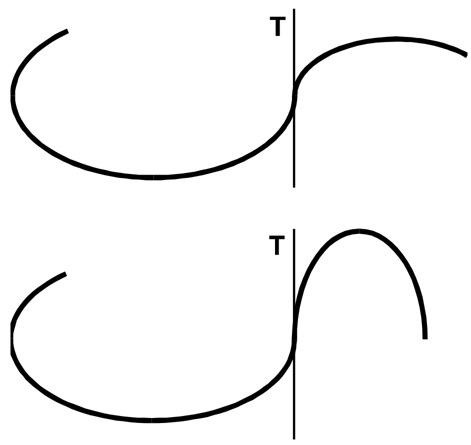


Figura 18

## PARABOLA:

Se genera con un corte oblicuo del cono, paralelo a la generatriz recta. Se define como el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta, directriz, y de un punto exterior a ella, centro o foco.(Figura 19)

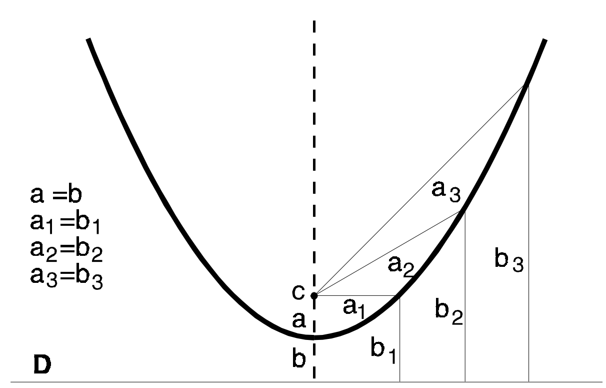


Figura 19

Las parábolas no tienen límite, crecen infinitamente. La curva es siempre la misma, lo que varia es el sector que se considera.También puede interpretarse como un cambio en la escala, al igual que la circunferencia.(Figura 20)

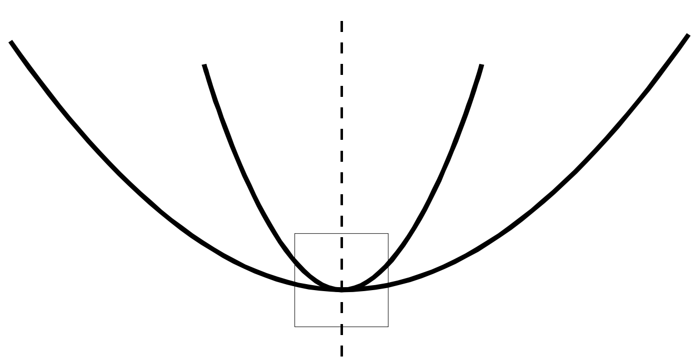


Figura 20

**Construcción de parábolas:**

Pueden construirse sucesivas tangentes por segmentos de rectas. Por lo general se dispone de tres datos: la ubicación de los puntos extremos, y del vértice.(Figura 21)

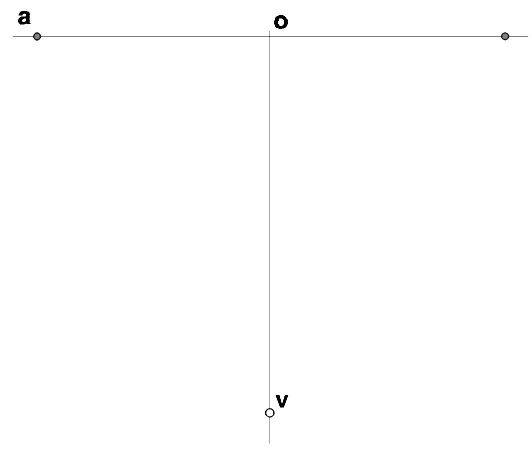



Figura 21

Por los puntos extremos “a” y “b” se traza el segmento de recta que los une, esto indica el ancho de la curva. Luego se traza la perpendicular al segmento $\overline{ab}$ que pasa por el vértice, determinando el punto “o”.
Se transporta la distancia $\overline{ov}$, que denominaremos altura, sobre el eje de la parábola, desde “v”, ubicando el punto “t”.
Se dividen los segmentos $\overline{ta}$ y $\overline{tb}$ en partes iguales que luego se unirán correspondientemente: 1 con 1, 2 con 2, 3 con 3, etc.(Figura 22)

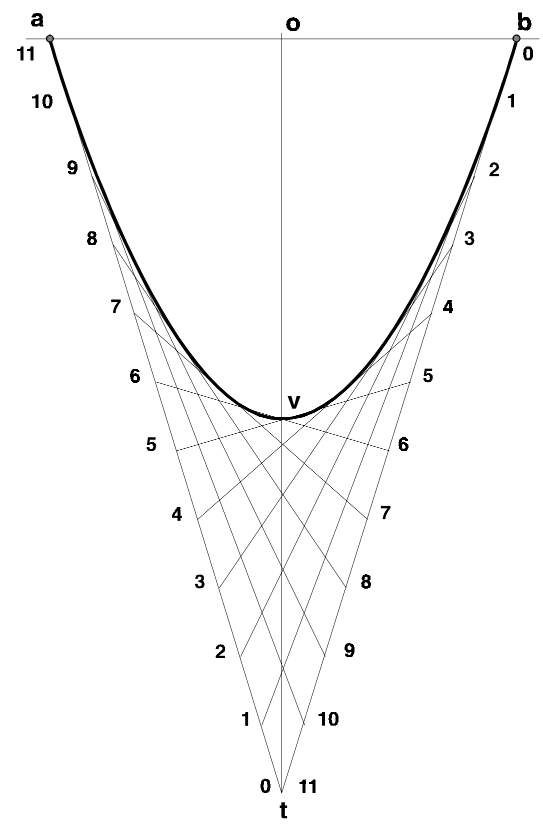



Figura 22

Esta construcción es muy útil ya que fácilmente podemos trazar parábolas en perspectiva, ubicando los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{ov}$ en el sistema en el que estemos trabajando.(Figura 23)

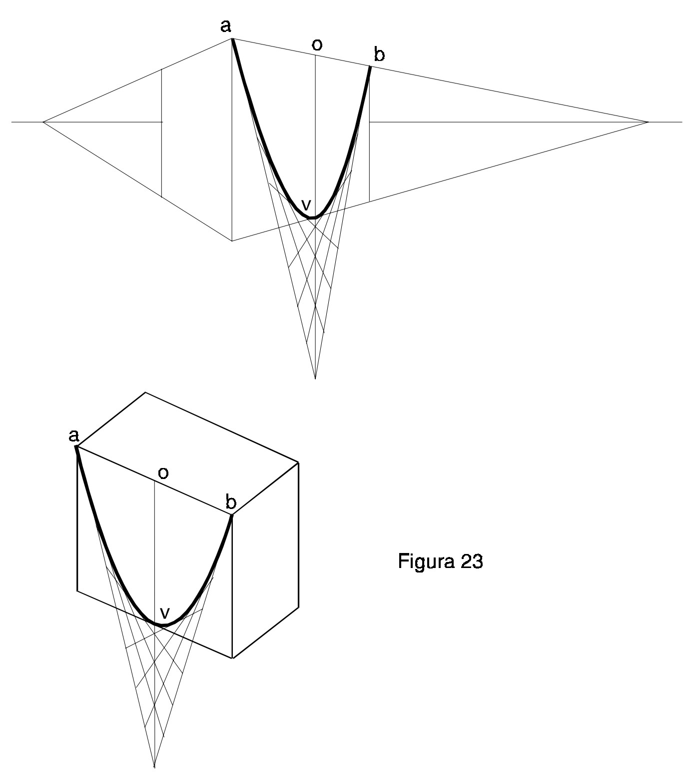



Figura 23

Otra manera de construirla es por puntos atendiendo a su definición. Se traza el eje de simetría de la parábola, sobre el cual ubicamos el centro “c” y perpendicular al mismo la directriz D (Figura 24). Sobre el eje de simetría y a 1/2 $\overline{cd}$ se encuentra el vértice de la parábola,”v”.
Se deben encontrar puntos que estén igualmente alejados del punto “c” y de la recta D. Para esto se traza una circunferencia con centro “c” y radio $R_1$ y una recta paralela a D, con un alejamiento igual a $R_1$. Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia pertenecen a la parábola.

Con el mismo procedimiento se trazan cuantas circunferencias sean necesarias, con radios mayores a 1/2 $\overline{cd}$ y se las corta con rectas paralelas a D, con alejamientos iguales a los radios.

Si se modifica la distancia entre “c” y D las parábolas se verán mas abiertas o mas cerradas.

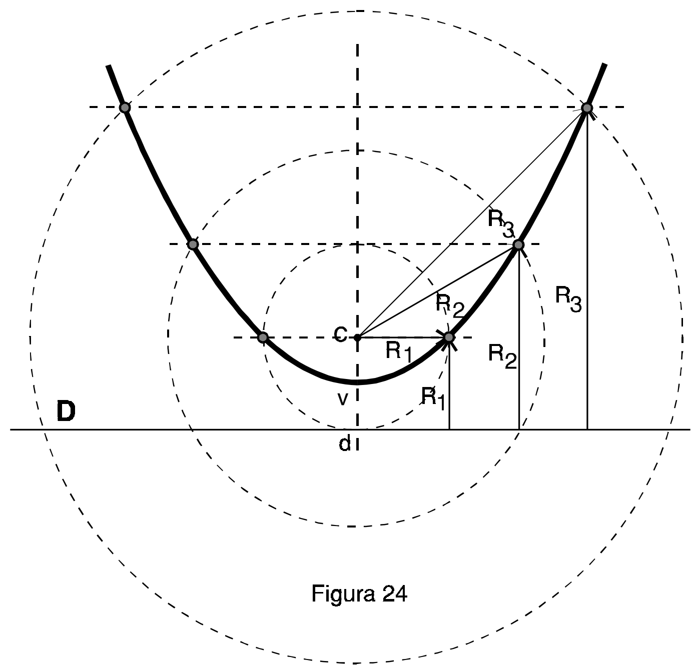


Figura 24

**Tangentes de parábolas:**

Las tangentes en las parábolas presentan una propiedad que facilita su trazado. Dado un punto “x” de la parábola, trazamos la distancia al eje de simetría de la curva, definiendo el punto ”o”. Trasladamos la medida $\overline{ov}$ sobre el eje hacia abajo, determinando el punto “t”. Trazamos la recta que pasa por “x” y por “t”, siendo esta la tangente en el punto “x”.(Figura 25)

La tangente en el vértice de la parábola (v) es paralela a la directriz.

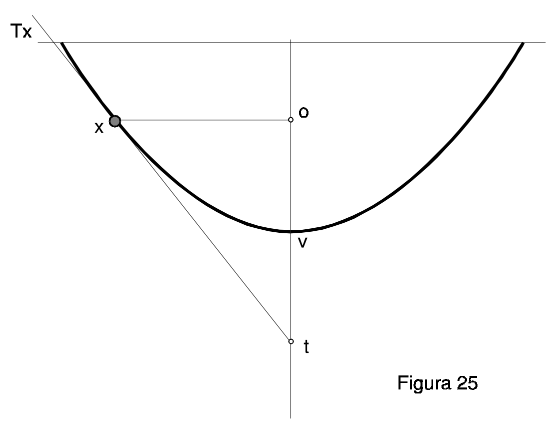


Figura 25

**Empalmes entre parábolas:**

Para producir un empalme entre parábolas o entre sectores de las mismas las curvas deben tener en el punto de unión la misma tangente.
Como la tangente en el vértice de la parábola (v) es paralela a la directriz podemos empalmar dos medias parábolas por su vértice. (Figura 26).

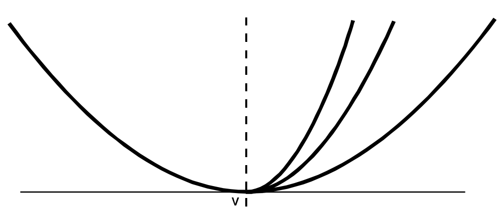


Figura 26

A partir de estos datos, si queremos empalmar una parábola en el punto “x” con otra con curvatura en sentido opuesto realizamos la siguiente construcción (Figura 27): Por el punto “x” trazamos una perpendicular al eje de la parábola que llamamos P. Por un punto cualquiera “m” de la tangente en “x” trazamos una paralela al eje. Este será el eje de la parábola de empalme y su altura sera la mitad de la distancia de “m” a la línea P.
Con estos datos solo queda construir la parábola de empalme. Recordemos que si las dos curvas tienen igual o similar curvatura en el punto de unión, la continuidad entre las mismas sera mas evidente.

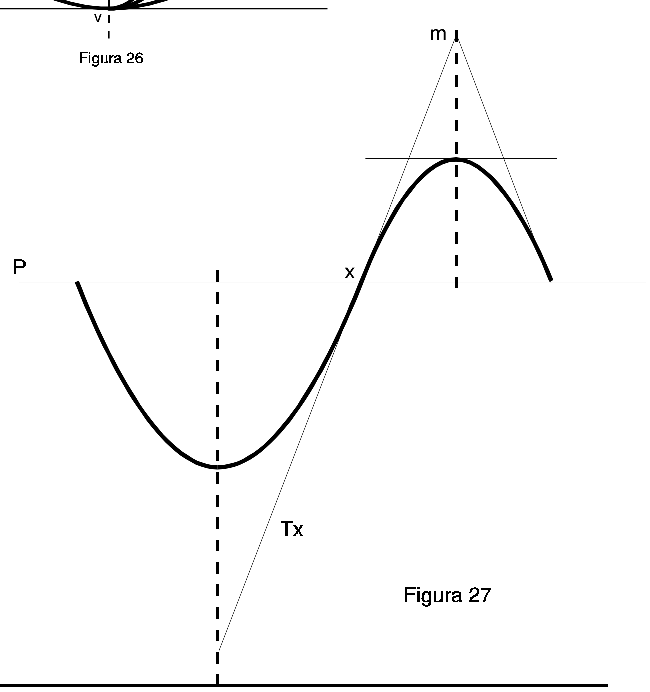
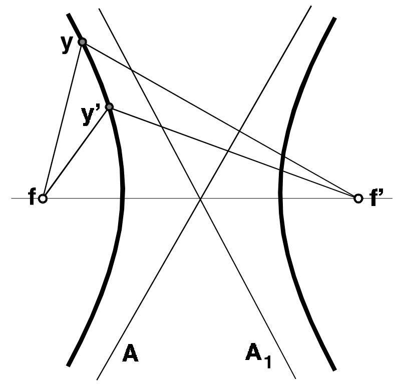


Figura 27

## HIPERBOLA:

Se generan con cortes del doble cono, tales que la pendiente del plano de corte sea superior a la pendiente de la generatriz recta.
Se definen como el conjunto de puntos del plano cuya diferencia a otros dos llamados focos es constante. Las hipérbolas tienen asíntotas, la curva se aproxima a estas líneas sin llegar nunca a cortarlas.
(Figura 28)

Cuando las asíntotas son perpendiculares las hipérbolas son equiláteras.




$\overline{fy} - \overline{yf'} = k$

$\overline{fy} - \overline{y'f} = k$

$A, A_1$ = asíntotas

Figura 28

**Construcción de Hipérbolas:**

Pueden construirse por puntos a partir de los focos, f y $f_1$.

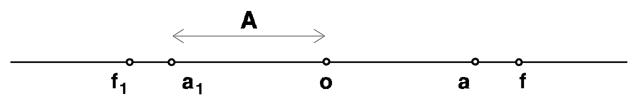
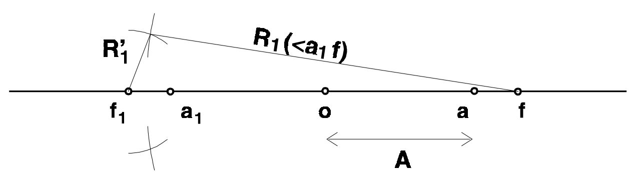



Figura 29

Se toma el segmento $\overline{ff_1}$ y se traza su punto medio "o". A partir de "o" se mide la distancia A, determinando los puntos "a" y "$a_1$". Estos puntos son los vértices de las hipérbola. (Figura 29) Cuanto mas cerca este "f" de "a" mayor curvatura tendrá la hipérbola.




Con centro en f y radio $R_1$, mayor que $\overline{fa_1}$, se trazan arcos de circunferencia arriba y abajo de $\overline{ff_1}$. Estos arcos se cortan con otros de centro $f_1$ y de radio $R'_1=R_1-2A$.(Figura 30)

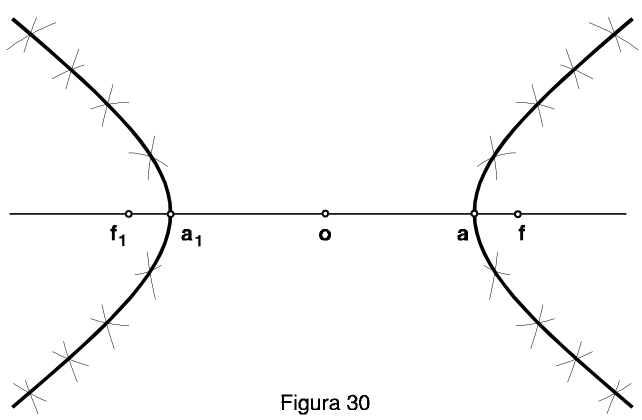



Figura 30

Para no tener que realizar cuentas, se puede hallar R' geométricamente con una recta auxiliar (Figura 31).

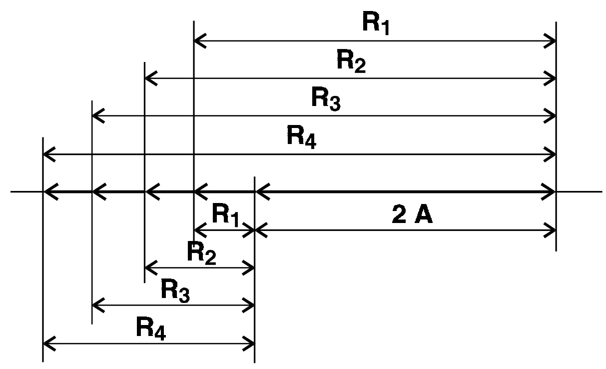



Figura 31

Las hipérbolas equiláteras pueden construirse por puntos a partir de su ecuación y= 1/x. (Figura 32)

Se trazan las asíntotas, que en el caso de hipérbola equiláteras forman un ángulo recto entre si y coinciden con los ejes de coordenadas.

Para cada punto de la asíntota horizontal le corresponde 1/x en la vertical. El punto de intersección es un punto de la hipérbola. Así al punto 3 corresponde 1/3; al 2, 1/2; al 1,1; al 1/2, 2 y así sucesivamente.

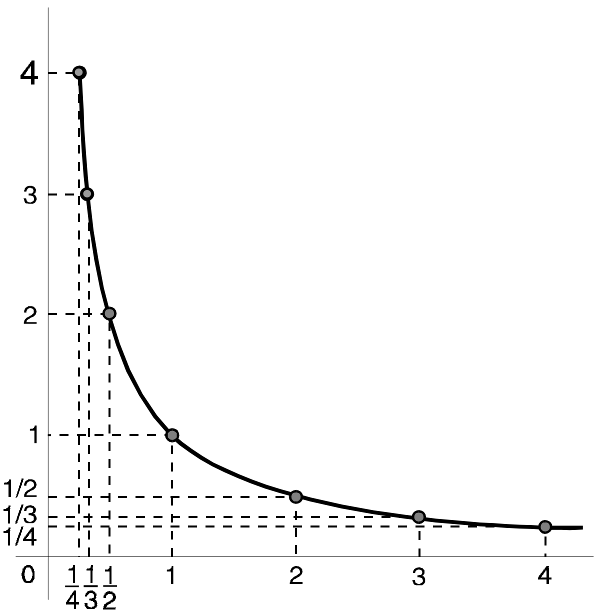



Figura 32

De acuerdo a la escala o a los módulos que se consideren la hipérbola sera mas o menos angulosa.(Figura 33)

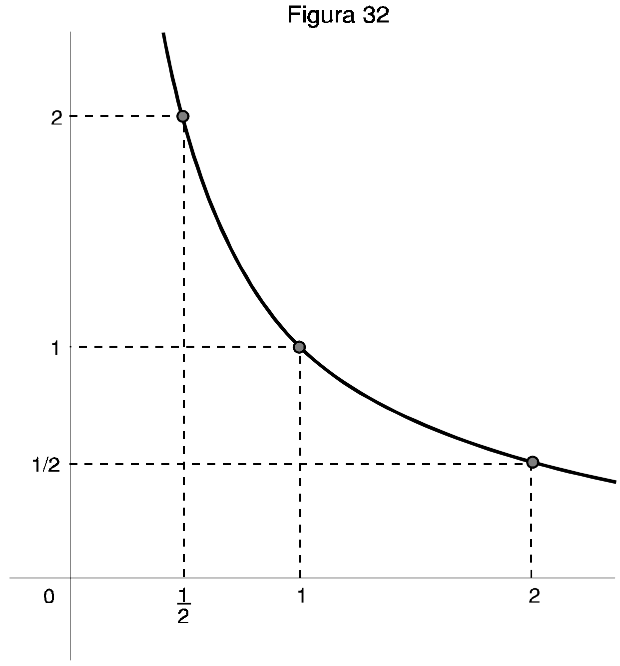



Figura 33

**Tangencia de Hipérbolas Equiláteras:**

Podemos construir la tangente a la hipérbola en el punto “x” de la siguiente manera: trazamos las distancias desde “x” a las asíntotas, definiendo los puntos “s” y “t”.

Uniendo esos puntos obtenemos la dirección de la recta tangente en el punto “x” que construimos trazando una paralela a $\overline{st}$ (la diagonal del rectángulo así definido) que pase por el punto “x”. (Figura 34)

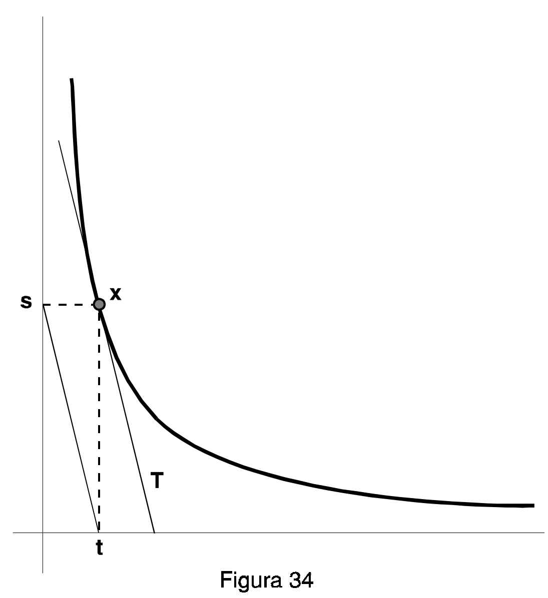



Figura 34

La tangente en el vértice de la hipérbola (v) forma 45º con las asíntotas.

**Empalmes entre hipérbolas equiláteras:**

Como la tangente en el vértice de la hipérbola (v) forma 45º con las asíntotas, podemos empalmar dos medias hipérbolas por su vértice. (Figura 35).

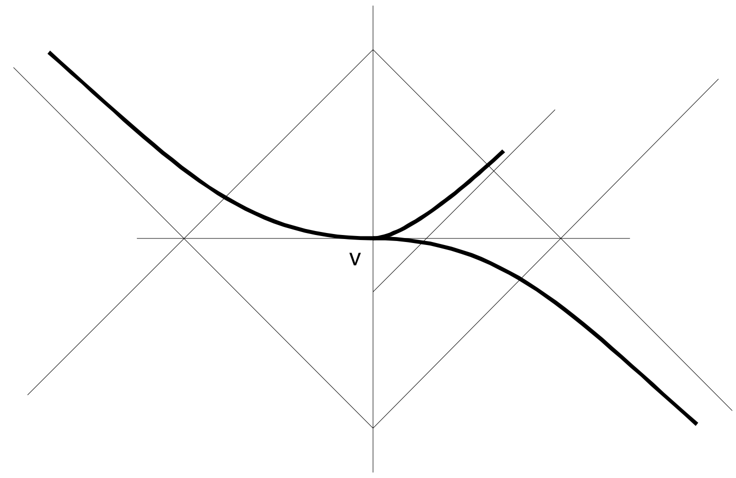



Figura 35

Si se quiere empalmar una hipérbola en un punto con otra de curvatura en sentido opuesto se realiza la siguiente construcción. (Figura 36)

El segmento st es la diagonal del rectángulo sxto, y por lo tanto igual al segmento xo. Trazamos un rectángulo semejante a sxto prolongando la diagonal del mismo, los lados sx y tx, y definiendo una medida de lado. Así obtenemos el rectángulo s'xt'o.

Prolongando los lados o's' y o't' definimos las asíntotas de la hipérbola de empalme (A'y B') que nos permite construir la curva.

La unión es posible ya que las diagonales del rectángulo s'xt'o tienen la misma pendiente que las del rectángulo sxto, por lo tanto la hipérbola que pase por el punto "x" con asíntotas en A' y B' tendrá la misma tangente que la hipérbola dato en el punto "x".

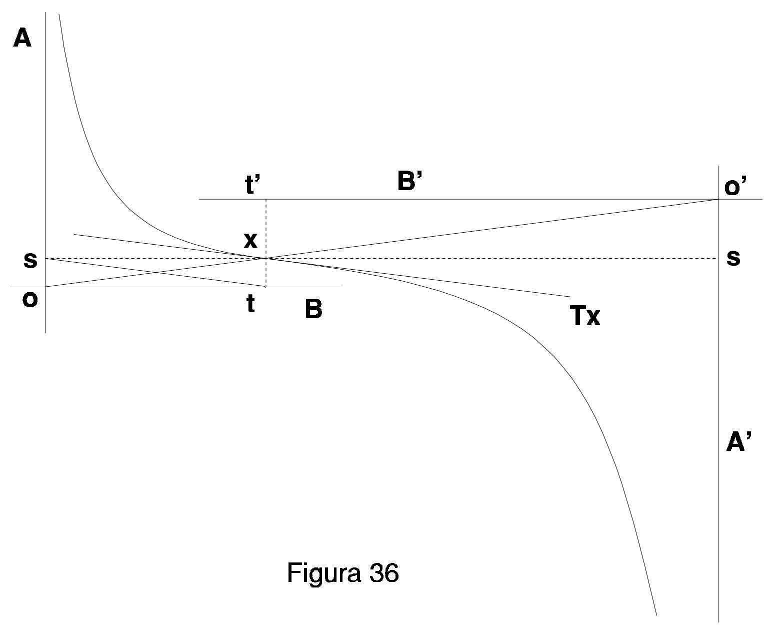



Figura 36

## Empalmes entre arcos de circunferencia y elipses, parábolas o hipérbolas:

La tangente en cualquier punto de la circunferencia es perpendicular al radio.

Por lo tanto si conocemos la tangente a la otra curva en el punto de empalme trazamos la perpendicular a la misma que pasa por ese punto y obtenemos la línea sobre la cual esta el centro del arco de circunferencia. Solo resta definir el radio y trazarla.

Recordemos que si la diferencia entre la curvatura de las líneas a empalmar es notable la unión no se leerá como continua desde un punto de vista perceptual. (Figura 37 y 38)

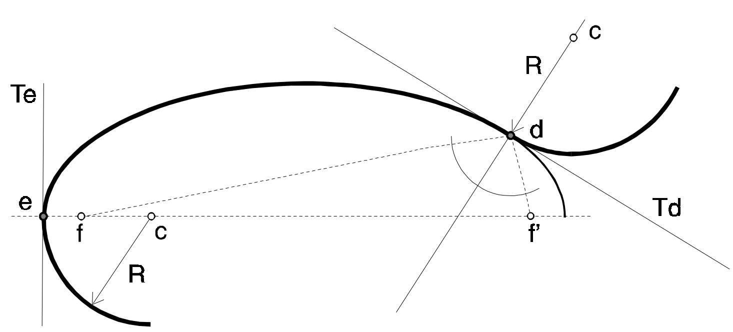



Figura 37

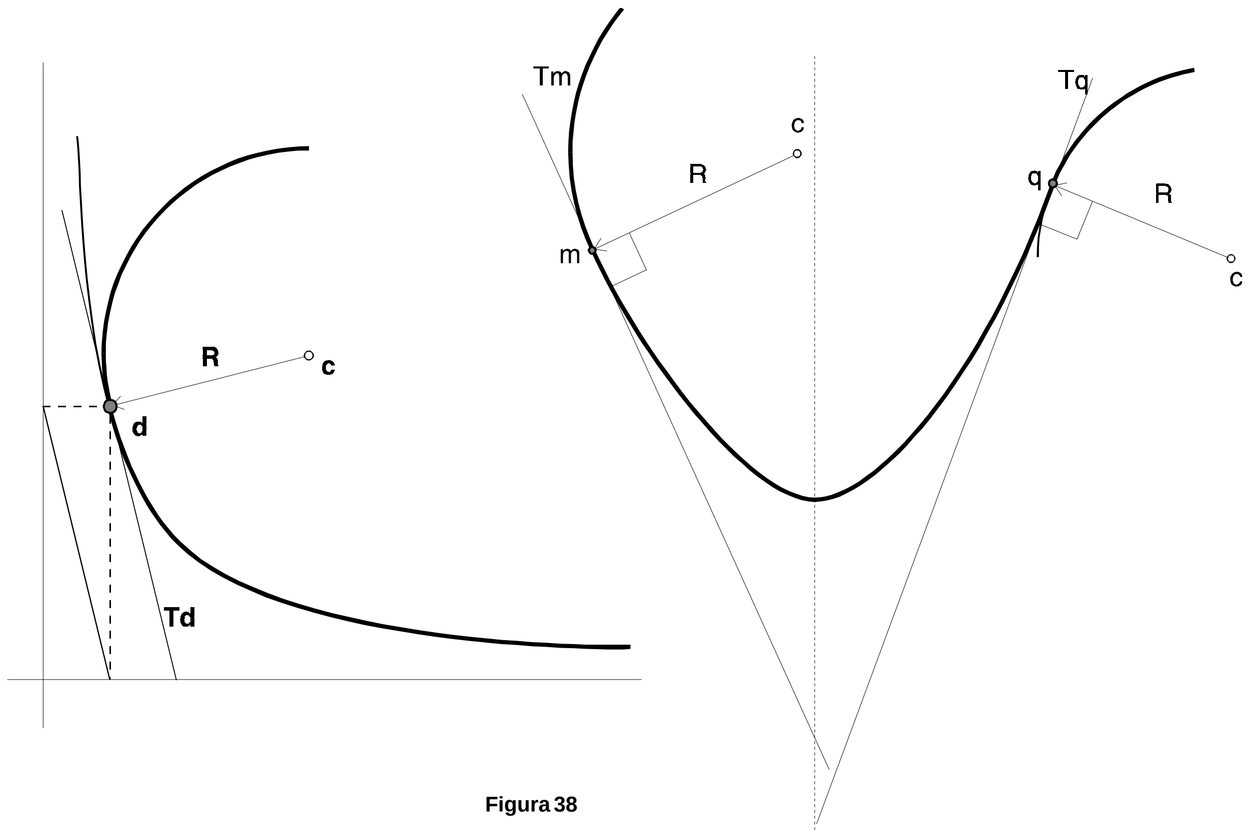



**Figura 38**

## *Bibliografía:*

1. Arq. Roberto Doberti, "Sistema de Figuras", Summa Nº38, Junio 1971, Buenos Aires.

2. Arq. Roberto Doberti, "Morfología Generativa" Summarios 9/10, Buenos Aires.

3. Sadosky-Guber, "Elementos del Cálculo Infinitesimal e Integral" Ed.Alsina, 1956, Buenos Aires.